Εικόνες τάξης και χάους σε διερεύνηση ιδιοτήτων ποδικού τριγώνου, μέσω δυναμικού Γεωμετρικού εργαλείου.

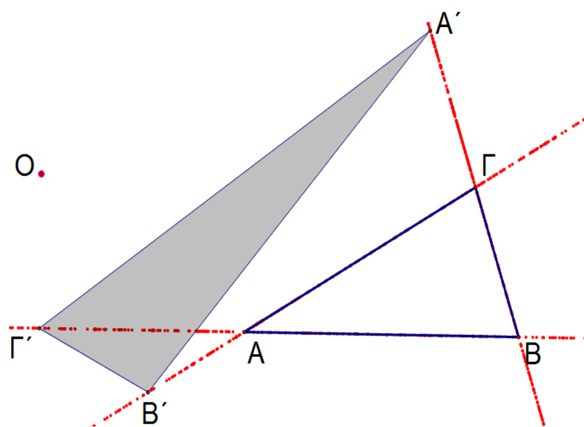
Θεματική Ενότητα 3η Πρακτικές και καινοτομίες στην εκπαίδευση και στην έρευνα

Γιάννης Π. Πλατάρος Μαθηματικός, Καπετάν Κρόμπα 37, 24200 ΜΕΣΣΗΝΗ, plataros@gmail.com

Abstract: The investigation of simple mathematical statements in a traditional way, in many cases, it is practically impossible. There are now accessible educational math software tools to rapidly explore mathematical statements that can not be performed in the traditional way of working. At the same time, shifts the focus on the discovery of mathematical knowledge in a playful way.

Περίληψη: Η έρευνα των απλών μαθηματικών καταστάσεων με παραδοσιακό τρόπο, σε πολλές περιπτώσεις, είναι πρακτικά αδύνατη. Υπάρχουν πλέον προσιτά εκπαιδευτικά εργαλεία λογισμικού μαθηματικών για την ταχεία διερεύνηση μαθηματικών καταστάσεων, που δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν με τον παραδοσιακό τρόπο εργασίας. Την ίδια στιγμή, μετατοπίζεται το ενδιαφέρον στην ανακάλυψη της μαθηματικής γνώσης, με παιγνιώδη τρόπο.

Εισαγωγή: Το ποδικό τρίγωνο, ορίζεται ως εξής: Έχω ένα δεδομένο τρίγωνο και ένα σημείο του επιπέδου του, το Ο. Από το Ο, φέρω τις καθέτους στους φορείς των πλευρών του τριγώνου και θεωρώ τους τρεις πόδες των καθέτων οι οποίοι ορίζουν ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ (το σκούρο) που καλείται «ποδικό τρίγωνο». Μια γνωστή ειδική περίπτωση ποδικού τριγώνου είναι το «ορθικό τρίγωνο» που ορίζεται από τους

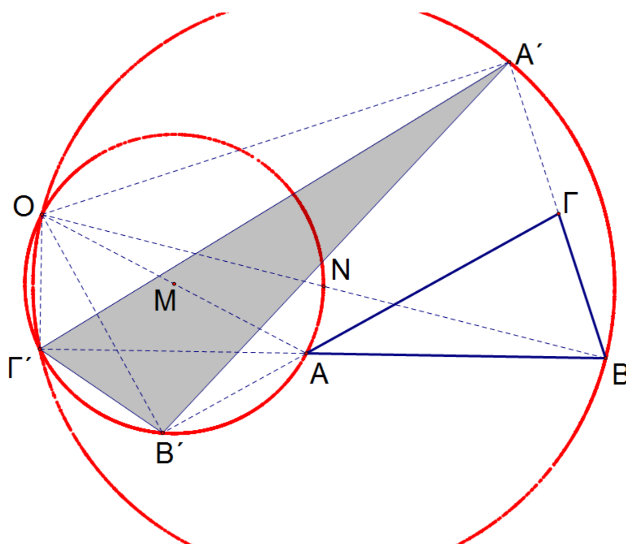


Σχ. 1

πόδες των υψών παντός τριγώνου, όπου τότε το «σημείο του επιπέδου» είναι το ορθόκεντρο, ενώ και όλα τα χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου έχουν τα αντίστοιχα ποδικά τους τρίγωνα με ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Ο χειρισμός του δυναμικού Γεωμετρικού εργαλείου, εδώ του Sketchpad, είναι για να ανακαλύπτει τις δυναμικές ιδιότητες του σχήματος, πιο συγκεκριμένα τους γεωμετρικούς τόπους. Καθώς ο κατασκευαστής του σχήματος «παίζει» πειραματιζόμενος με την κίνηση, ανακαλύπτει αμέσως την πρώτη προφανή ιδιότητα του σχήματος:

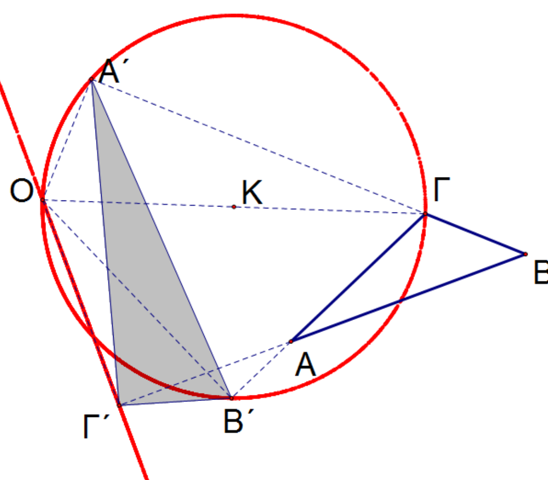
1. Καθώς το Ο κινείται οπουδήποτε στο επίπεδο, το ποδικό Α΄Β΄Γ΄ κινείται έτσι ώστε οι κορυφές του να ευρίσκονται πάντα στους φορείς των πλευρών του αρχικού τριγώνου ΑΒΓ. (Σχ. 1) Η ιδιότητα αυτή είναι στο γνωστικό πεδίο του προφανούς, αρκεί να συνειδητοποιηθεί η ίδια η κατασκευή.
2. Καθώς το Γ κινείται οπουδήποτε στο επίπεδο, το Γ΄ μένει σταθερό, ενώ τα Α΄ και Β΄ κινούνται επί δύο κύκλων που διέρχονται από το Ο και το Γ΄. (Σχ.2) Εδώ φαίνεται απαρχή ανακάλυψης πρότασης (ισχυρή εικασία) και η οποία θέλει απόδειξη. Πράγματι· ισχύει ότι ΟΓ΄ ⊥ ΑΒ, ΟΒ΄⊥ ΑΓ και ΟΑ΄⊥ΒΓ εκ κατασκευής του σχήματος και αφού τα Β΄ , Γ΄ βλέπουν το ΟΑ με ορθή γωνία, τα Ο,Α, Β΄, Γ΄ είναι ομοκυκλικά και το κέντρο του κύκλου είναι στο μέσον Μ του ΟΑ.



Σχ. 2

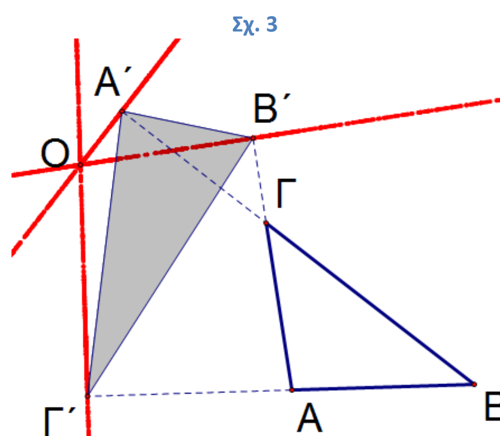
3. Ομοίως η δικαιολόγηση για τον μεγαλύτερο κύκλο που έχει κέντρο το μέσον Ν του ΟΒ.
4. ΜΝ=// $\frac{AB}{2}$ και ΜΑ=$\frac{AB}{2}$ και ΑΝ μεσοκάθετος του ΟΒ, είναι κάποιες άλλες παρατηρήσεις που μπορούν να εξαχθούν αμέσως από το σχήμα.
5. Όταν το Γ γίνεται σημείο των κύκλων, τότε αρχικό και ποδικό τρίγωνο αποκτούν κοινό φορέα (άμεση εξήγηση από την κατασκευή)

6. Όταν το ΑΒ κινείται παραλλήλως προς τον εαυτό του διατηρώντας σταθερό το μέγεθός του, τα Α΄, Β΄ φαίνονται να κινούνται επί κύκλου ενώ το Γ΄ επί ευθείας κάθετης στην ΑΒ από το Ο. Είμαστε δηλαδή προ μιας παρατηρήσεως, που επάγει σε ανακάλυψη μιας πρότασης και η οποία χρειάζεται αιτιολόγηση-απόδειξη. Πράγματι, η ΟΓ είναι η διάμετρος του κύκλου, αφού το Α΄ βλέπει την ΟΓ υπό ορθή γωνία (εκ κατασκευής) Επίσης η ΑΒ, κινείται συνεχώς κάθετα στην σταθερή διεύθυνση ΟΑ΄ (Σχήμα 3)



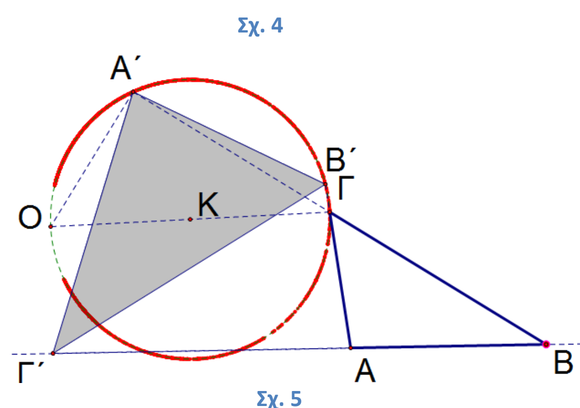
Σχ. 3

7. Καθώς το αρχικό τρίγωνο κινείται οπουδήποτε στο επίπεδο παράλληλα με τον εαυτό του, οι κορυφές του ποδικού κινούνται επί τριών ευθειών που διέρχονται από το Ο και είναι κάθετες στις πλευρές του αρχικού. Η παρατήρηση ότι οι κάθετες στις πλευρές του αρχικού από το σταθερό σημείο Ο συνιστούν σταθερές διευθύνσεις αρκεί για την αιτιολόγηση. (Σχήμα 4)



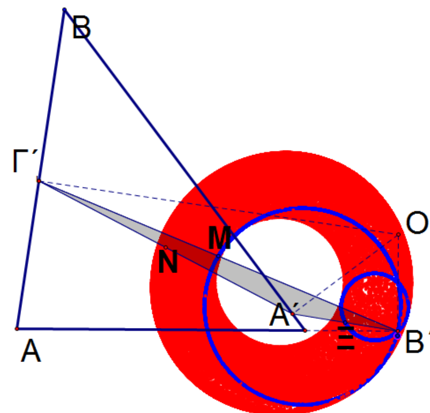
Σχ. 4

8. Καθώς το ΑΒ κινείται επί του φορέα του, (σχήμα 5) χωρίς αναγκαστικά να έχει και σταθερό μήκος, και το Γ σταθερό, τότε τα Α΄ και Β΄ κινούνται επί κύκλου με διάμετρο το σταθερό τμήμα ΟΓ. Η εξήγηση τεκμαίρεται με την παρατήρηση, ότι τα Α΄ και Β΄ βλέπουν το ΟΓ υπό ορθή γωνία, εκ κατασκευής. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η μη διαγραφή ολόκληρου του κύκλου από το



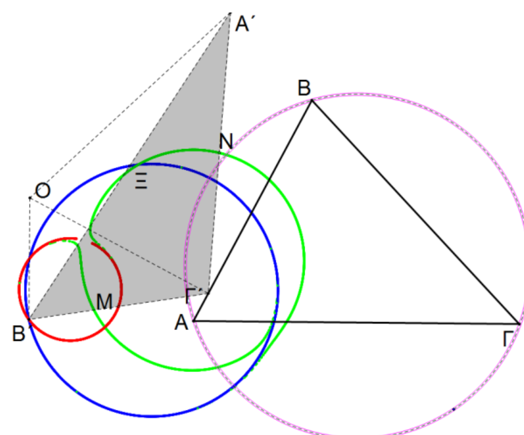
Σχ. 5

Α΄ καθώς αυτό τείνει στο Ο όταν το Β τείνει στο άπειρο της απόστασης εκατέρωθεν του φορέα του ΑΒ. Εμπλέκεται ο παρατηρητής δηλαδή, με απειροστικές διαδικασίες από γεωμετρική οδό, κάτι που παρατηρείται συχνά σε διερευνητικές διεργασίες με τα δυναμικά λογισμικά.

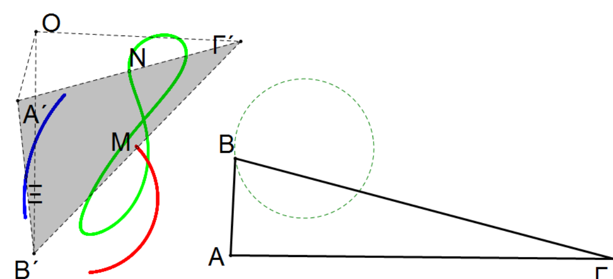


Σχ. 6

9. Σχήμα 6 : Καθώς το σημείο Β του αρχικού τριγώνου κινείται ελευθέρως στο επίπεδο, για τα μέσα Μ,Ν,Ξ των Β΄Γ΄, Α΄Γ΄, Β΄Γ΄ αντιστοίχως, έχουμε την εικόνα: Τα μεν Μ,Ξ να κινούνται επί κύκλων το δε Ν, να διαγράφει σημεία ενός δακτυλίου. Ο δακτύλιος φαίνεται να ορίζεται από δύο ομόκεντρους κύκλους εκ των οποίων ο μεν εξωτερικός φαίνεται να εφάπτεται εξωτερικώς των δύο ο δε εσωτερικός, να εφάπτεται των δύο, στον μεν ένα μεγαλύτερο εσωτερικώς και στον μικρότερο εξωτερικώς. Το δυναμικό λογισμικό εργαζόμενο αόκνως, φέρνει μιαν άλλη πρόταση στην επιφάνεια, χρίζουσα βεβαίως πρώτα σαφούς διατυπώσεως και κατόπιν αποδείξεως. Οι όποιες εικασίες θα γίνουν με επαναληπτικό πειραματισμό. Πράγματι, εάν περιορίσουμε την ελεύθερη κίνηση του Β στο επίπεδο και βάλουμε το Β να κινείται σε κύκλο (σχήμα 7) τότε βλέπουμε μια άγνωστη καμπύλη να διαγράφεται μεταξύ των δύο κύκλων και μάλιστα με έναν συγκεκριμένο τρόπο: Καθώς πλησιάζει τον μικρό κύκλο, εκτελεί απότομα ένα βρόχο

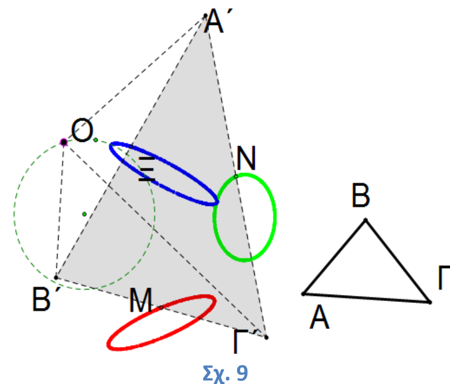


Σχ. 7



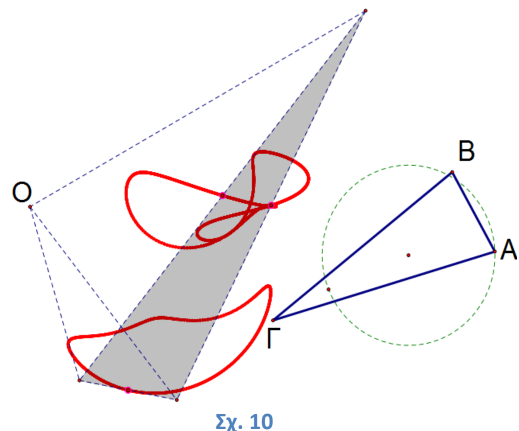
Σχ. 8

στο μεγαλύτερο μέρος του κύκλου και έναν άλλο βρόχο στον μεγαλύτερο κύκλο. Επομένως οι δύο κύκλοι που ορίζουν τον δακτύλιο φαίνεται ότι είναι οι περιβάλλουσες της οικογένειας αυτών των άγνωστων καμπυλών. Όταν ο κύκλος που διαγράφει το Β δεν περιβάλλει το ΑΒΓ (σχήμα 8) τότε οι κύκλοι διαγράφονται μερικώς, όμως η άγνωστη καμπύλη διαγράφεται πλήρως.

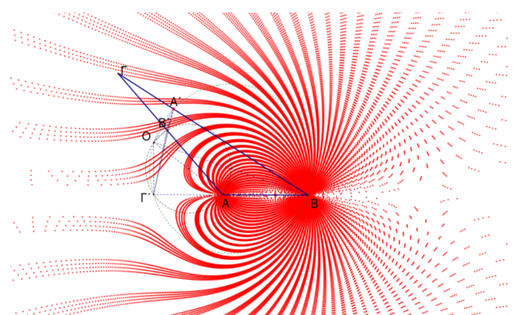


Σχ. 9

10. Αν το Ο το βάλουμε να διαγράψει κύκλο, τότε τα μέσα των πλευρών του ποδικού τριγώνου, φαίνονται να διαγράφουν τρεις ελλείψεις. (Σχ. 9)
11. Εάν επιχειρήσουμε να κινήσουμε το ΒΓ παράλληλα προς τον εαυτό του επί κύκλου διατηρώντας σταθερό το μέγεθός του, τότε τα μέσα των πλευρών του ποδικού τρίγωνου διαγράφουν τρεις άγνωστες καμπύλες. (Σχ.10)
12. Αν με την λογική του αντίστροφου προβλήματος ενός γεωμετρικού τόπου κατασκευάσουμε τους δύο κύκλους του Σχ.2, και βάλουμε να κινούνται επ΄ αυτών τα Α΄ και Β΄ ορίζοντας το Γ ως τομή των διευθύνσεων ΑΒ΄ και Α΄Β, τότε αν απαιτήσουμε από το λογισμικό την σχεδίαση του ίχνους του Γ, παίρνουμε την εικόνα του Σχ.11 Φαίνεται μια εικόνα σαν ένα πεδίο της Φυσικής, όπου υπάρχει μια άπειρη οικογένεια καμπυλών που καλύπτουν το επίπεδο και δεν τέμνονται πέραν των Α, Β. Και στην Φυσική η εικόνα ενός πεδίου, ορίζεται από γραμμές που δεν τέμνονται και έχουν μια ιδιότητα γεωμετρικού τόπου. Αν γνωρίζαμε εκ των προτέρων εξ αρχής μια τέτοια διαδρομή, τότε αν το Γ ακολουθούσε μία απ΄ αυτές, τα Α΄ και Β΄ θα διέγραφαν κύκλους, με σχέση ταχυτήτων όση έχουμε ορίσει



Σχ. 10



Σχ. 11

στο λογισμικό. Η μεταπήδηση σε γειτονική τροχιά δεν μπορεί να καταγράψει αισθητή ασυνέχεια στην κίνηση, καθώς και η γειτονική τροχιά, οσοδήποτε κοντά έχει προκύψει από μια κοντινή κίνηση. Έτσι η χαοτική κίνηση του Γ οπουδήποτε στο επίπεδο με οποιαδήποτε τροχιά, διαγράφει μια –φαινόμενη- συνεχή τροχιά για τα Α΄, Β΄.

Ειδικά και Γενικά Συμπεράσματα: α) Το λογισμικό προσφέρει αξεπέραστη ακρίβεια σχεδιαστική. Στην πραγματικότητα, λόγω δυνατότητας δυναμικής κίνησης, αυτό που συνήθως φαίνεται να ισχύει «με το μάτι» και να οδηγεί σε μια πρώτη εικασία, μπορεί να εξεταστεί με τροποποίηση του σχήματος με μια κίνηση και να ειδωθεί και από άλλη οπτική σχεδιαστική. Έτσι, η όποια λανθασμένη εικασία, σταματά εν τω γεννάσθαι. Η δυνατότητα μέτρησης όλων των μεγεθών λόγων, συναρτήσεων, γωνιών κτλ επίσης σταματά αμέσως λανθασμένες εικασίες ή –επί το δημιουργικότερον - δημιουργεί εδραίες εικασίες, υποθέσεις, σχεδόν βεβαιότητες, οπότε απομένει η απόδειξη. Παραλλήλως σχεδιάζει όποια συνάρτηση του τεθεί που αφορά γεωμετρικά μεγέθη (μήκη εμβαδά, λόγους, μέτρα γωνιών, συναρτήσει οποιουδήποτε εν τω μεταβάλλεσθαι μεγέθους και έχουμε άμεση παράλληλη σχεδίαση της συνάρτησης απ΄όπου εξάγουμε γεωμετρικά συμπεράσματα . Γίνεται δηλαδή μια άμεση σύνδεση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την Ανάλυση. Επίσης η δυνατότητα διερεύνησης (ειδικές περιπτώσεις, οριακές περιπτώσεις, οριακές θέσεις, εκφυλισμός σχήματος κ.ο.κ) είναι αξεπέραστη.

β) Η ίδια η ύπαρξη του λογισμικού και η ίδια η χρήση του, αναπόφευκτα επάγει την ανάγκη πειραματισμού και διερεύνησης πράγμα που ναι μεν αρχαιόθεν υπάρχει στα Μαθηματικά, όμως «επιμελώς αποκρύπτεται» αφού σχετικές αναφορές, συνηθέστατα δεν συναντώνται στα βιβλία Μαθηματικών (εγχειρίδια, συγγράμματα, Ιστορικά της Επιστήμης) ούτε καν ως σπαράγματα. Πιθανόν –για να διακινδυνεύσουμε και μια εξήγηση- η εξιδανικευμένη διάνοια, πρότυπο, δεν δέχεται την «τυχαία ανακάλυψη» του εργαστηρίου όπως συνήθως γίνεται στις Φυσικές Πειραματικές Επιστήμες[1]. Σε κάθε περίπτωση όμως αυτό δεν μπορεί να συνεχίζεται, αφού όλες οι διδακτικές των αντικειμένων παντός του επιστητού, ομιλούν για «επανανακάλυψη γνώσης» πράγμα που τα ειδικώς σχεδιασμένα για διδακτικούς σκοπούς (και όχι μόνο) λογισμικά προσφέρουν πλουσίως, ενώ η

[1] Εάν βάλλει κάποιος στην Google τις λέξεις «τυχαίες ανακαλύψεις» θα βρει αναφορές και δεκάδες άρθρα για επίσης δεκάδες εφευρέσεις Ιατρικής, Χημείας, Φαρμακευτικής, Φυσικής, Αστρονομίας, όχι όμως και Μαθηματικών! Κατά ένα ορισμό της ανακάλυψης, « Ανακάλυψη είναι ένα τυχαίο γεγονός που συναντά ένα προετοιμασμένο μυαλό.» Albert von Szent-Gyorgyi, 1893-1986, Ούγγρος φυσιολόγος. Αυτό βεβαίως, ισχύει για όλους τους ερευνητές, όλων των επιστημών.

λογική του εθισμού στην διερεύνηση, γενίκευση, εξέταση ομοειδών περιπτώσεων, ειδικότερων περιπτώσεων , γενικά ο πειραματισμός με την παρατήρηση, προφανώς και αναπτύσσουν την κριτική σκέψη, αφού όλες αυτές οι δραστηριότητες εξ ορισμού συνιστούν την ίδια την –από όλους ευκταία- κριτική σκέψη. Κάτι τέτοιο, σε ένα ιδανικό εκπαιδευτικό σύστημα, θα έπρεπε να μας κάνει να μεταβούμε από την απαγόρευση αντιγραφής από τα σκονάκια στις εξετάσεις, στην απαγόρευση της αντιγραφής και «από μνήμης»[2] όπως είναι το νυν δεσπόζον μοντέλο εξετάσεων και να οδεύσει σταθερά στις αρχές της κριτικής σκέψης (λ.χ. εξετάσεις «με ανοιχτά βιβλία») και ανάλογα θέματα.

γ) Καθώς προχωρούμε σε πιο περίπλοκες κινήσεις, οι εμφανιζόμενοι γεωμετρικοί τόποι, από το επίπεδο της ευθείας και του κύκλου, πηγαίνουν στην έλλειψη και κατόπιν σε μη «επώνυμες» καμπύλες, πράγμα που δείχνει άλλη μια φορά, από άλλη οπτική, τα περιορισμένα όρια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και την αναγκαία νομοτελειακή εξέλιξή της με την Αναλυτική Γεωμετρία, όπου από την τάξη των πεπερασμένων καμπυλών μελέτης (ευθεία, κύκλος, κωνικές τομές) μεταβαίνουμε στον πραγματικό κόσμο της Γεωμετρίας, δηλ. των απείρων ειδών καμπυλών.

δ) Οι εικόνες χάους (κίνηση οπουδήποτε στο επίπεδο) επάγουν τάξη (κίνηση σε συγκεκριμένη κυκλική τροχιά) Αντιστρόφως, κίνηση σε συγκεκριμένη τάξη – τροχιά, μπορεί να δημιουργήσει φαινόμενο χάος, αφού η συνέχεια της κίνησης στους κύκλους με σταθερή σχέση ταχυτήτων φαίνεται να δημιουργεί μια κάλυψη του επιπέδου με μια οικογένεια καμπυλών (εικασία)

ε) Δημιουργείται η αίσθηση, ότι χωρίς το συγκεκριμένο λογισμικό είναι πάρα πολύ δύσκολη η ανακάλυψη προτάσεων (εδώ στο ορθικό) Στην πραγματικότητα, φαίνεται η εντύπωση να είναι ακόμα πιο στενή. Η δραστηριότητα πειραματισμού με κίνηση και «μηχανικές μεθόδους» χρονολογείται τουλάχιστον από την εποχή του Αρχιμήδους[3], ενώ κατά την Αναγέννηση και μετά όπου οι μεγάλοι Μαθηματικοί ήταν συνήθως σε Βασιλικές Αυλές είχαν την δυνατότητα

---

[2] Χαρακτηριστική αυτή η φράση –θέση του Πανεπιστημιακού καθηγητή του Παν. Ιωαννίνων Γιώργου Μαυρογιώργου σε άρθρο του υπό τον τίτλο «**Εάν και όταν οι «ειδικοί» του Υπουργείου Παιδείας αντιγράφουν!» στην εκπαιδευτική πύλη Αλφαβήτα.**

[3]**Επιστολή Αρχιμήδους «Έφοδος προς Ερατοσθένην»(** 83.17-28) Ὁρῶν δέ σε, καθάπερ λέγω, σπουδαῖον καὶ φιλοσοφίας προεστῶτα ἀξιολόγως καὶ τὴν ἐν τοῖς μαθήμασιν κατὰ τὸ ὑποπίπτον θεωρίαν τετιμηκότα ἐδοκίμασα γράψαι σοι καὶ εἰς τὸ αὐτὸ βιβλίον ἐξορίσαι τρόπου τινὸς ἰδιότητα, καθ' ὅν σοι παρεχόμενον ἔσται λαμβάνειν ἀφορμὰςεἰςτὸ δύνασθαί τινα τῶν ἐν τοῖςμαθήμασι **θεωρεῖν διὰ τῶν μηχανικῶν**. Τοῦτο δὲ πέπεισμαι **χρήσιμον εἶναι οὐδὲν ἧσσον καὶ εἰς τὴν ἀπόδειξιν αὐτῶν τῶν θεωρημάτων. Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν.**

της μηχανικής σχεδιαστικής σε αμμοδόχους κτλ για «ισχυρές εικασίες». Εκεί ξαναρχίζει η ανακάλυψη «επώνυμων καμπυλών» όπου δίπλα στα ονόματα Αρχιμήδους (ελλειικοειδούς) Απολλωνίου (κωνικών τομών) Ιππεία του Ηλείου (τετραγωνίζουσα) , Διοκλέους (κισσοειδής) καμπύλη του Ευδόξου, κτλ . εμφανίζονται και οι νεώτερες των Μπερνούλι (μινίσκος) παραβολή του Νεύτωνος, τρίαινα του Νεύτωνος και άλλες ων ουκ έστιν αριθμός.   Γεγονός είναι, ότι εκτός από κάποιες απλές προτάσεις που μπορούν να ανακαλυφθούν δια γυμνού οφθαλμού (και μάλλον έχουν ήδη ανακαλυφθεί όλες) οι υπόλοιπες απαιτούν ισχυρά εργαλεία και πλέον τα εργαλεία τα έχουν και οι ερευνητές και οι δάσκαλοι των Μαθηματιών και οι μαθητές. Μάλιστα, τα εργαλεία αυτά, είναι σχεδόν το ίδιο προσιτά σε όλους ακόμα και τα μη ελευθέρας διανομής. (Λογισμικά Mathematica, MathDad, MAPL, κ.ά.)

στ) Γνωρίζουμε, ότι τα δυναμικά Γεωμετρικά λογισμικά κυκλοφορούν ευρύτατα, διδάσκονται στην επιμόρφωση Β΄ επιπέδου, πλην η εισαγωγή τους στην εκπαιδευτική πράξη είναι υποτυπώδης. Τα οφέλη ωστόσο δεν είναι γνωστά, καθώς οι πρωτόγνωρες βιωματικές καταγραφές δεν μπορούν να μεταφερθούν πάντα στο χαρτί παραστατικά και πειστικά. Η επί πολλά χρόνια άσκηση και ενάσκηση των εκπαιδευτικών των Μαθηματικών με συγκεκριμένη πρακτική σε συγκεκριμένο περιβάλλον (Πανελλήνιες , φροντιστηριακή διδασκαλία) δημιουργούν εδραίες δύσκολα μεταβαλλόμενες αντιλήψεις για το τι είναι τα μαθηματικά και πώς διδάσκονται. Δεν είναι όμως έτσι, καθώς ένα τεράστιο κομμάτι τους, η μαθηματική ανακάλυψη, δεν αιτιολογείται επαρκώς ή αφήνεται να εννοηθεί ότι μόνο ιδιοφυίες μπορούν να ασχοληθούν με αυτήν. Η σύγχρονη όμως διδακτική, απαιτεί διαδικασίες επανανακάλυψης της γνώσης η οποία γίνεται μέσω παρατηρήσεων, πειραμάτων («άγνωστη λέξη» στα Μαθηματικά, ωστόσο καθημερινή έννοια για τους ερευνητές των μαθηματικών) εικασιών, υποθέσεων, απορρίψεων με αντιπαράδειγμα, τροποποιήσεων, ανασκευών και αποδείξεων. Η στερεοτυπική δομή «πρόταση-απόδειξη» , «άσκηση-λύση» επαναλαμβάνεται σχεδόν σε όλα τα μαθηματικά εγχειρίδια και συγγράμματα, έτσι ώστε η μαγεία της μαθηματικής ανακάλυψης (όχι της απόδειξης) να τείνει να μηδενίζεται αφού πρόσβαση σε αυτήν, φαίνεται να έχουν μόνο «οι προικισμένοι» και όχι οι κοινοί θνητοί. Η «αντικειμενική» αλήθεια, ίσως είναι κοντά σε μια τέτοια εκτίμηση, όμως σίγουρα δεν είναι και η αλήθεια. Όλα τα εργαλεία του ανθρώπου σε ολόκληρο τον τομέα του επιστητού, είναι προεκτάσεις των αισθήσεών του (όραση , ακοή απτικότητα, γεύση, όσφρηση) και κάποιων νοητικών λειτουργιών του (μνήμη, ταξινόμηση, αναζήτηση, διερεύνηση, ταχύτητα υπολογισμών κ. ά.) Οι Η/Υ έκαναν την επανάστασή τους και ο επανακαθορισμός του νοήματος των Μαθηματικών (τι είναι μαθηματικά ,

γιατί τα διδάσκουμε, ποία διδάσκουμε ποία δεν διδάσκουμε, πώς τα διδάσκουμε) τίθεται κάθε μέρα σε αναθεώρηση και επανακαθορισμό και μάλιστα με μεγάλη ταχύτητα. Αυτό συνήθως γίνεται αντιληπτό βιωματικά όταν φυλλομέτρει κάποιος παλαιά διδακτικά εγχειρίδια Μαθηματικών και αναρωτιέται το τι και το γιατί του παλιού Αναλυτικού προγράμματος σπουδών που σηματοδοτούσε το κάθε εγχειρίδιο. Καταθέτουμε επίσης την εμπειρία μας για επιφωνήματα θαυμασμού που προκαλούσε η εμφάνιση για πρώτη φορά «με ένα κλικ» ενός γ.τ. στους παλιούς Μαθηματικούς που είχαν την Λυκειακή εμπειρία διδασκαλίας ως μαθητές (και βέβαια την δυσκολία) των γ.τ.

Η χρήση αυτών των εργαλείων στην τάξη, θα πρέπει να γίνει μια αυτονόητη διαδικασία σε όλα τα σχολεία και η ανάδειξη των διδακτικών πλεονεκτημάτων τους είναι ο μικρός στόχος της παρούσας εργασίας.

Βιβλιογραφικές - Διαδικτυακές αναφορές:

1) http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/gGallery/problems/Pedal.html Ιστοσελίδα του καθηγητή του Παν. Κρήτης Πάρη Πάμφιλου
2) http://mathworld.wolfram.com/PedalTriangle.html από τον ιστότοπο Wolfrarm Mathworld
3) http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Matteson.September/pedal/pedal.html από το Πανεπιστήμιο της Georgia
4) Πλατάρος Ιωάννης *«Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση με χρήση των γεωμετρικών λογισμικών»* Πρακτικά 1[ου] Εκπαιδευτικού Συνέδριου ένταξης και χρήσης των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας Βόλος 24-26/4/2009
5) Πλατάρος Ιωάννης *«Μια Γεωμετρική εφαρμογή Μεγίστου κι Ελάχιστου με χρόνο, μέσω Δυναμικού Λογισμικού, ως Διδακτική Πρόταση»* Πρακτικά 2[ου] Συνέδριου Ημαθίας για τις ΤΠΕ Νάουσα-Βέροια 23-24-25 Απριλίου 2010
6) Πλατάρος Ιωάννης *«Η ολιστική διδασκαλία των απλών γεωμετρικών τόπων,* στα πλαίσια σύγχρονων παιδαγωγικών θεωρήσεων.» Πρακτικά 25[ου] Συνεδρίου ΕΜΕ στον Βόλο.
7) Πλατάρος Ιωάννης *«Η διδακτική αξιοποίηση του λογισμικού Sketchpad στην διδασκαλία των Γεωμετρικών Απεικονίσεων στο επίπεδο.»* 27[ο] Συνέδριο ΕΜΕ Χαλκίδος,19-21 Νοεμβρίου 2010